

# הרחבת הסמכה במתמטיקה 5 יח

פרק 4 - מטריצות והעתקות לינאריות

תוכן העניינים

- 1 ..... 1. מטריצה שמייצגת העתקה.....

## מטריצה שמייצגת העתקה

**הערה :**  
 כביסיס לפרק זה יש להכיר את המושגים וקטור **קוואורדינט** ביחס לבסיס  
**ומטריצת מעבר** מבסיס לבסיס (סוף הפרק מרחבים וקטוריים).  
 לפיכך, השאלה הראשונה עוסקת בכך.

### שאלות

1) נתונים שני בסיסים של  $\mathbb{R}^3$  :

$$B_1 = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,1,1)\}, \quad B_2 = \{(1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$$

א. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס  $B_1$ .

$$\text{סמן וקטור זה ב- } [v]_{B_1}.$$

ב. מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס  $B_2$ .

$$\text{סמן וקטור זה ב- } [v]_{B_2}.$$

ג. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס  $B_1$  לבסיס  $B_2$ .

$$\text{סמן מטריצה זו ב- } [M]_{B_1}^{B_2}.$$

ד. מצאו מטריצת מעבר מהבסיס  $B_2$  לבסיס  $B_1$ .

$$\text{סמן מטריצה זו ב- } [M]_{B_2}^{B_1}.$$

ה. אשרו את הטענות הבאות:

$$[M]_{B_2}^{B_1} \cdot [v]_{B_1} = [v]_{B_2} \cdot 1$$

$$[M]_{B_1}^{B_2} \cdot [v]_{B_2} = [v]_{B_1} \cdot 2$$

$$[M]_{B_1}^{B_2} = ([M]_{B_2}^{B_1})^{-1} \cdot 3$$

(2) נתונה העתקה לינארית :  $T: R^3 \rightarrow R^3$

: נתוניים שני בסיסים של  $R^3$

$$B_1 = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,1,1)\}, \quad B_2 = \{(1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$$

א. מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס  $B_1$ .

$$\text{סמן} \text{ מטריצה} \text{ זו} \text{ ב-} \cdot [T]_{B_1}$$

ב. מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בbasis  $B_2$ .

$$\text{סמן} \text{ מטריצה} \text{ זו} \text{ ב-} \cdot [T]_{B_2}$$

ג. אשרו את הטענות הבאות :

$$[T]_{B_1} \cdot [v]_{B_1} = [T(v)]_{B_1} .1$$

$$[T]_{B_2} \cdot [v]_{B_2} = [T(v)]_{B_2} .2$$

$$[M]_{B_2}^{B_1} \cdot [T]_{B_1} \cdot [M]_{B_1}^{B_2} = [T]_{B_2} .3$$

ד. האם ההעתקה הפיכה?

ה. חשבו את הדטרמיננטה והעקבה של ההעתקה.

ו. מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים עבור ההעתקה.

ז. האם ההעתקה ניתנת לכתסו?

(3) נתונה העתקה לינארית  $. T: R^3 \rightarrow R^3$

ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בbasis  $B = \{(1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$

$$\cdot [T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ היא}$$

מהי נוסחת ההעתקה? פתרו בשתי דרכים שונות.

(4) יהיו  $B_1$  ו-  $B_2$  שני בסיסים של המרחב  $R^3$ , ויהי  $T$  אופרטור לינארי על  $R^3$ .

$$\cdot [T]_{B_1} = \begin{pmatrix} -29 & -45 & 6 \\ 20 & 31 & -4 \\ 13 & 19 & -1 \end{pmatrix} \text{ ו- } [M]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} -1 & -9 & 6 \\ 1 & 6 & -4 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \text{ נתון כי:}$$

$$\cdot [T]_{B_2} \text{ ו- } [M]_{B_2}^{B_1} \text{ חשבו את}$$

5) מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה:

$$, T(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A \quad , \quad T : M_2[R] \rightarrow M_2[R]$$

$$\text{לפי הבסיס: } . B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

6) מצאו את המטריצה שמייצגת את ההעתקה  $D : P_4[R] \rightarrow P_3[R]$ ,  
לפי הבסיס הסטנדרטי של הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל-4.

7) נתונה העתקה לינארית  $T : M_2[R] \rightarrow M_2[R]$ . ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס הסטנדרטי

$$\cdot [T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{היא}$$

מצאו את נוסחת ההעתקה.

8) נתונה העתקה לינארית  $T : P_2[R] \rightarrow P_2[R]$ . נתון כי המטריצה המייצגת את ההעתקה, לפי הבסיס הסטנדרטי,

$$\cdot [T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{היא}$$

מצאו את נוסחת ההעתקה.

9) נתונה העתקה לינארית  $T : P_2[R] \rightarrow P_2[R]$ . נתון כי המטריצה המייצגת את ההעתקה, לפי הבסיס  $, B = \{1, 1-x, x+x^2\}$

$$\cdot [T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} : \text{היא}$$

א. מצאו את נוסחת ההעתקה. כמובן, מצאו את  $T(p(x))$ .

\* פתרו בשתי דרכים שונות.

ב. מצאו את  $T^2(p(x))$ .

10) תהיו  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  העתקה לינארית, ותהי  $A$  מטריצה ממשית,

כך שמתקיים  $v \in \mathbb{R}^n$  לכל  $T(v) = Av$ .

נתון כי  $B$  בסיס ל-  $\mathbb{R}^n$  ו-  $n = \text{rank}(A)$

הוכחו כי  $[T]_B$  הפיכה.

11) נתונה העתקה לינארית  $T : P_3[R] \rightarrow P_3[R]$ .

ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה בסיס הסטנדרטי

$$\cdot [T]_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ היא}$$

- א. מצאו גרעין ותמונה של ההעתקה.
- ב. מצאו את נוסחת ההעתקה.

12) נתונה העתקה לינארית  $T : M_2[R] \rightarrow M_2[R]$ .

ידוע שהמטריצה שמייצגת את ההעתקה, בסיס הסטנדרטי,

$$\cdot [T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ היא}$$

- א. מצאו גרעין ותמונה של ההעתקה.
- ב. חשבו את העקבה, הדטרמיננטה והדרגה של ההעתקה.
- ג. מצאו את נוסחת ההעתקה.

13) נתונה העתקה לינארית :  $T : P_2[R] \rightarrow P_2[R]$

הוכיחו ש-  $T$  העתקה נילפוטנטית.

14) יהיו  $V = \mathbb{R}_2[x]$  מרחב הפולינומים ממעלה 2 ומטה מעל  $\mathbb{R}$ .

נתון הבסיס  $B = \{1, x, x^2\}$ , ונתונה העתקה הלינארית

$$\cdot T(p(x)) = xp''(x) - p'(x) ; T : V \rightarrow V$$

א. מצאו את המטריצה המייצגת  $[T]_B$ .

ב. מצאו בסיס וממד עבור  $\text{Im}(T), \text{Ker}(T)$ .

הערה : בפתרון סעיף זה לא נשמש במטריצה המייצגת למציאת הגרעין והתמונה, היות ונוסחת ההעתקה כבר נתונה בתרגיל.

. 15) נתונות שתי העתקות לינאריות  $V \rightarrow V$

יהי  $B = \{u, v, w\}$  בסיס  $V$ .

$$\text{נתון כי:} \quad \begin{cases} S(u) = u + v \\ S(v) = v + w \\ S(w) = w + u \end{cases}, \quad \begin{cases} T(u) = u - v \\ T(v) = v - w \\ T(w) = w - u \end{cases}$$

. א. הוכיחו כי:  $\text{Ker}(T) \neq \{0\}$ ,  $\text{Ker}(S) = \{0\}$

. ב. עבור כל אחת מההעתקות קבוע האם היא חח"ע ו/או על.

. ג. קבוע האם  $\{T(u), T(v), T(w)\}$  פורשת את  $V$ .

. ד. קבוע האם  $\{S(u), S(v), S(w)\}$  פורשת את  $V$ .

### תשובות סופיות

$$[M]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \text{ג} \quad (x, y, z-x-y) . \text{ב} \quad (x, y-x-z, z) . \text{א} \quad (1)$$

ה. שאלת הוכחה.

$$[M]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} . \text{ג}$$

$$[T]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} . \text{ב} \quad [T]_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \text{א} \quad (2)$$

ה. הדטרמיננטה: 0, העקבה: 3

ו. 0 ע"י ייחד; הו"ע שלו: (1, -1, 1). ז. לא.

$$T(x, y, z) = (x+y, y+z, z-x) \quad (3)$$

$$[M]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -0.5 & -1 & 0.5 \\ -0.25 & -1 & 0.75 \end{pmatrix}, \quad [T]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 1 \\ -0.75 & 2.75 & 0.5 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$T\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$T(p(x)) = p(x+1) ; T : P_2[R] \rightarrow P_2[R] \quad (8)$$

$$T(a+bx+cx^2) = (a+2b-2c)+(2a+4c)x+(2a+b+2c)x^2 . \text{א} \quad (9)$$

$$T^2(a+bx+cx^2) = (a+2c)1 + (10a+8b+4c)x + (8a+6b+4c)x^2 . \text{ב}$$

(10) שאלת הוכחה.

$$\text{Ker}(T) = sp\{-x+x^3, -1+x^2\}, \text{ Im}(T) = sp\{1+x^2, x+x^3\} . \text{א} \quad (11)$$

$$T(a+bx+cx^2+dx^3) = (b+d)(1) + (a+c)x + (b+d)x^2 + (a+c)x^3 . \text{ב}$$

$$\text{Ker}(T) = sp\left\{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}, \text{ Im}(T) = sp\left\{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right\} . \text{א} \quad (12)$$

$$\text{tr}(T) = 15, \det(T) = 0, \text{rank}(T) = 2 . \text{ב}$$

(13) שאלת הוכחה.

$$B_{\text{Im}(T)} = \{1\}, \dim(\text{Im}(T)) = 1 . \text{ב} \quad [T]_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \text{א} \quad (14)$$

(15) שאלת הוכחה.